4. Преобразование Лорана (Z-преобразование)

4.1. Ряд Лорана. Прямое и обратное Z-преобразование

Ряд Лорана является универсальным представлением однозначных аналитических функций комплексной переменной. Рассматривая некоторую однозначную аналитическую функцию $S(z)$, запишем:

$$S(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-z_0)^n=$$

$$=\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n}_{\substack{\textit{регулярная (правильная)}\\ \textit{часть}}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} C_{(-n)}(z-z_0)^{-n}}_{\substack{\textit{сингулярная (главная)}\\ \textit{часть}}}, \qquad (4.1)$$

где z_0 - некоторая точка комплексной плоскости. При записи ряда Лорана принято выделять регулярную и сингулярную части, как показано при записи (4.1). Областью сходимости регулярной части ряда Лорана является круг, радиус которого обозначим $R_{\text{сх}}$, с центром в точке z_0. Сингулярная часть ряда Лорана сходится вне круга, радиус которого обозначим $r_{\text{сх}}$, с центром в точке z_0. Областью сходимости ряда Лорана является область, в которой сходятся и регулярная и сингулярная части, и при $r_{\text{сх}}<R_{\text{сх}}$ представляет собой кольцо $r_{\text{сх}}<|z-z_0|<R_{\text{сх}}$ (см. рис.4.1).

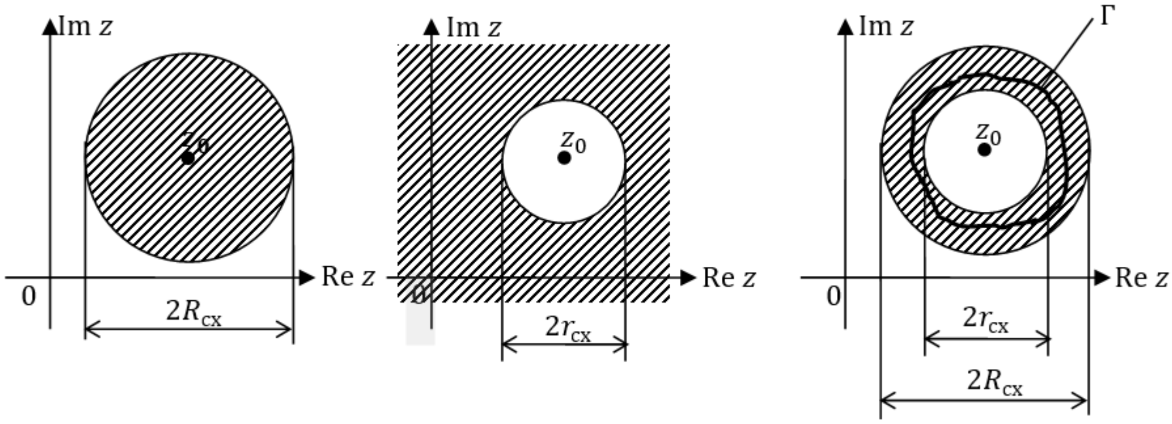

Рис.4.1. Области сходимости для регулярной части, сингулярной части и ряда Лорана

Коэффициенты ряда Лорана определяются по формуле:

$$C_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\frac{S(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \qquad (4.2)$$

где Г - замкнутый контур, лежащий в области сходимости и охватывающий точку z_0, также показан на рис.4.1.

Рассмотрим частный случай, когда последовательность коэффициентов ряда Лорана такова, что $C_{n>0}=0$, и $z_0=0$, и перепишем (4.1) в виде:

$$S(z)=C_0+\sum_{n=1}^{+\infty}C_{(-n)}z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}C_{(-n)}z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}s[n]z^{-n},$$

где из (4.2) $s[n]=C_{(-n)}=\dfrac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma}S(z)z^{n-1}dz$.

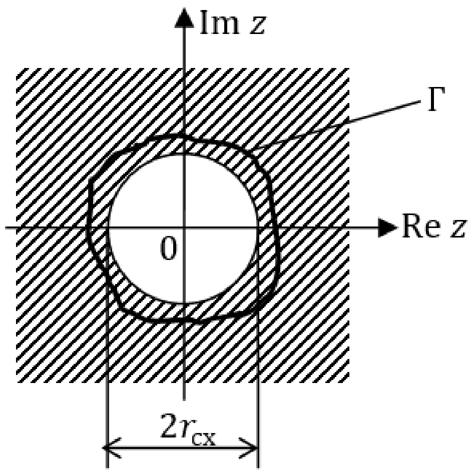

Рис.4.2. Область сходимости

В рассматриваемом частном случае область сходимости определяется сингулярной частью ряда Лорана и представляет собой всю комплексную плоскость за исключением круга радиуса $r_{\text{сх}}$ с центром в точке 0, как показано на рис.4.2. Контур Г лежит в области сходимости и охватывает точку 0.

Выпишем отдельно полученные результаты:

$$S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}s[n]z^{-n}; \tag{4.3а}$$

$$s[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma}S(z)z^{n-1}dz,\quad n\geq 0. \tag{4.3б}$$

Выражения (4.3) показывают, что числовой последовательности $\{s[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, такой что $s[n<0]=0$, может быть поставлена в соответствие аналитическая функция $S(z)$, причём, в виду единственности разложения в ряд Лорана, это соответствие взаимнооднозначно.

Преобразование дискретного сигнала вида (4.3а) называется (прямым) преобразованием Лорана (или Z – преобразованием). Функция $S(z)$ называется изображением (Z – изображением) дискретного сигнала $\left\{s[n]\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$.

Преобразование (4.3б) называется обратным преобразованием Лорана (обратным Z – преобразованием).

Изображение дискретного сигнала будем обозначать той же, но заглавной, буквой, что и сигнал. Соответствие сигнала и его изображения кратко будем обозначать записью $s[n] \leftrightarrow S(z)$, прямое Z – преобразование, как $S(z) = Z\left\{s[n]\right\}$, обратное Z – преобразование, как $s[n] = Z^{-1}\left\{S(z)\right\}$.

Z-преобразование в теории дискретных сигналов и линейных дискретных систем играет такую же роль как и преобразование Лапласа в теории аналоговых систем: преобразования позволяют сводить уравнения анализа систем к алгебраической форме. Покажем, что Z – преобразование связано с преобразованием Лапласа дискретного сигнала. Рассмотрим дискретный сигнал $s_{д}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s(nT)\delta(t - nT)$ и применим к нему преобразование Лапласа $L\left\{\cdot\right\}$. С учётом свойств линейности и запаздывания, вспоминая, что $L\left\{\delta(t)\right\} = 1$, получим:

$$\bar{S}_{д}(p) = L\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} s(nT)\delta(t - nT)\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} s(nT) L\left\{\delta(t - nT)\right\} = \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} s(nT)e^{-pnT}. \quad (4.4)$$

Преобразование (4.4) называется дискретным преобразованием Лапласа.

Сравнивая (4.3) и (4.4), убедимся, что Z – преобразование переходит в дискретное преобразование Лапласа при замене $z = e^{pT}$:

$$\bar{S}_{д}(p) = S(z)\big|_{z=e^{pT}}. \quad (4.5)$$

4.2. Основные свойства Z – преобразования
4.2.1. Свойство линейности

Пусть сигнал $s_1[n]$ имеет изображение $S_1(z)$, сигнал $s_2[n]$ имеет изображение $S_1(z)$ и $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ - постоянные, тогда изображение линейной комбинации этих сигналов является такой же линейной комбинацией их изображений:

$$Z\{k_1 s_1[n] + k_2 s_2[n]\} = k_1 Z\{s_1[n]\} + k_2 Z\{s_2[n]\}. \qquad (4.6)$$

Покажем это:

$$Z\{k_1 s_1[n] + k_2 s_2[n]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} (k_1 s_1[n] + k_2 s_2[n]) z^{-n} =$$

$$= k_1 \sum_{n=0}^{+\infty} s_1[n] z^{-n} + k_2 \sum_{n=0}^{+\infty} s_2[n] z^{-n} = k_1 L\{s_1[n]\} + k_2 L\{s_2[n]\}.$$

Разумеется, преобразования с рядами, выполняемые здесь и далее, имеют смысл только в области сходимости преобразования Лорана.

4.2.2. Запаздывание сигнала

Пусть сигнал $s[n]$ имеет изображение $S(z)$ и целое число $m \geq 0$, тогда сигнал $s[n-m]$ имеет изображение $S(z) z^{-m}$:

$$Z\{s[n-m]\} = Z\{s[n]\} z^{-m}. \qquad (4.7)$$

Действительно, рассмотрим

$$Z\{s[n-m]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} s[n-m] z^{-n},$$

введём индекс суммирования $k = n - m$, тогда n выразим как $n = k + m$ и последнее выражение продолжим в виде:

$$Z\{s[n-m]\} = \sum_{k=-m}^{+\infty} s[k] z^{-k} z^{-m}.$$

Учитывая, что $s[k<0] = 0$, запишем

$$Z\{s[n-m]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} s[k] z^{-k} z^{-m} = Z\{s[k]\} z^{-m}.$$

4.2.3. Теорема о свёртке

Свёртка $s[n] = s_1 * s_2[n]$ двух дискретных сигналов $s_1[n]$ и $s_2[n]$ определяется по правилу:

$$s[n] = \sum_{n'=0}^{+\infty} s_1[n'] s_2[n-n'] = \sum_{n'=0}^{+\infty} s_1[n-n'] s_2[n']. \qquad (4.8)$$

Изображением свёртки является произведение изображений каждого из сигналов:

$$Z\{s_1 * s_2[n]\} = Z\{s_1[n]\} Z\{s_2[n]\}. \qquad (4.9)$$

Для доказательства рассмотрим Z – преобразование свёртки сигналов, учтём свойства линейности и запаздывания:

$$Z\{s_1 * s_2[n]\} = Z\left\{\sum_{n'=0}^{+\infty} s_1[n'] s_2[n-n']\right\} = \sum_{n'=0}^{+\infty} s_1[n'] Z\{s_2[n-n']\} =$$

$$= \sum_{n'=0}^{+\infty} s_1[n'] z^{-n'} Z\{s_2[n]\} = Z\{s_1[n']\} Z\{s_2[n]\}.$$

4.2.4. Умножение сигнала на показательную последовательность

Если сигнал $s[n]$ имеет изображение $S(z)$, то сигнал $s[n]a^n$ имеет изображение $S(a^{-1}z)$:

$$s[n]a^n \leftrightarrow S(a^{-1}z). \qquad (4.10)$$

Действительно:

$$Z\left\{s[n]a^n\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} s[n]a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} s[n](a^{-1}z)^{-n} = S(a^{-1}z).$$

4.2.5. Умножение сигнала на косинус

При умножении сигнала на косинус его изображение преобразуется по следующему правилу:

$$s[n]\cos(\omega_0 nT + \varphi_0) \leftrightarrow \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} S(ze^{-j\omega_0 T}) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} S(ze^{j\omega_0 T}). \qquad (4.11)$$

Формулу (4.11) нетрудно получить, воспользовавшись формулой Эйлера для косинуса и свойствами (4.6), (4.10):

$$Z\{s[n]\cos(\omega_0 nT + \varphi_0)\} = Z\left\{s[n]\frac{e^{j\omega_0 nT} e^{j\varphi_0} + e^{-j\omega_0 nT} e^{-j\varphi_0}}{2}\right\} =$$

$$= \frac{e^{j\varphi_0}}{2} Z\left\{s[n]e^{j\omega_0 nT}\right\} + \frac{e^{-j\varphi_0}}{2} Z\left\{s[n]e^{-j\omega_0 nT}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} S(ze^{-j\omega_0 T}) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} S(ze^{j\omega_0 T}).$$

4.2.6. Дифференцирование изображения

Умножение сигнала $s[n]$ на n связано с дифференцированием изображения:

$$Z\{ns[n]\} = -z\frac{d}{dz}Z\{s[n]\}. \qquad (4.12)$$

Для доказательства проделаем следующие преобразования:

$$Z\{ns[n]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} ns[n]z^{-n} = -z\sum_{n=0}^{+\infty}(-n)s[n]z^{-n-1} = -z\sum_{n=0}^{+\infty}s[n]\frac{dz^{-n}}{dz} =$$

$$= -z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty}s[n]z^{-n} = -z\frac{d}{dz}Z\{s[n]\}.$$

4.3. Обратное Z - преобразование

При обращении Z – преобразования, когда изображение представлено в виде дроби, числитель и знаменатель которой представляют собой многочлены относительно z^{-1}, используют представление этой дроби в виде суммы дробей со знаменателями первой и второй степени. Обращение осуществляют отдельно для каждого из слагаемых с учётом свойств Z - преобразования, а также таблиц известных пар по Лорану. Связанные с указанным подходом некоторые математические приёмы будут рассмотрены в дальнейшем на конкретных примерах.

Также обратное Z – преобразование можно выполнять с учётом теоремы о вычетах:

$$s[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} S(z)z^{n-1}dz = \sum_k \operatorname*{res}_{z_k}\left[S(z)z^{n-1}\right]. \qquad (4.13)$$

Так как контур Γ находится в области сходимости $S(z)$ и охватывает точку 0 (см. рис.4.2), то он охватывает все полюсы подынтегрального выражения z_k.

4.4. Примеры Z-преобразований
4.4.1. Геометрическая прогрессия

Этот раздел является вспомогательным: материал, который мы здесь приводим нам потребуется для рассмотрения примеров Z-преобразований.

Последовательность чисел вида

$$x_0,\ x_0q,\ x_0q^2, \ldots$$

называется геометрической прогрессией, x_0 - начальным членом прогрессии, q - знаменателем прогрессии.

Частичная сумма геометрической прогрессии определяется как

$$\sigma_N = \underbrace{x_0 + x_0 q + x_0 q^2 + \ldots + x_0 q^{N-1}}_{N\ слагаемых} = x_0 \sum_{n=0}^{N-1} q^n . \qquad (4.14)$$

Для частичной суммы геометрической прогрессии можно получить компактное выражение, рассматривая разность

$$\sigma_N - q\sigma_N = x_0 + x_0 q + x_0 q^2 + \ldots + x_0 q^{N-1} -$$
$$- x_0 q - x_0 q^2 - \ldots - x_0 q^N = x_0 - x_0 q^N ,$$

откуда

$$\sigma_N = \begin{cases} x_0 \dfrac{1-q^N}{1-q}, \ q \neq 1 \\ x_0 N, \ q = 1 \end{cases}. \qquad (4.15)$$

Полной суммой членов геометрической прогрессии называется

$$\sigma_\infty = \lim_{N\to\infty} = \begin{cases} x_0 \dfrac{1}{1-q}, \ |q| < 1 \\ \infty, \ |q| \geq 1 \end{cases}. \qquad (4.16)$$

Полная сумма членов геометрической прогрессии существует, когда модуль знаменателя прогрессии меньше единицы.

4.4.2. Усечённая показательная последовательность

Усечённая показательная последовательность описывается выражением:

$$s[n] = \begin{cases} a^n, \ n = 0,\ldots, N-1 \\ 0, \ n < 0, \ n > N-1 \end{cases}. \qquad (4.17)$$

Временные диаграммы, соответствующие записанному выражению в зависимости от значения a разнообразны. Примеры временных диаграмм показаны на рис.4.3.

Заметим, что в частном случае $a = 1$ показательная последовательность описывает дискретный прямоугольный импульс из N ненулевых отсчётов. В другом частном случае, когда $a = e^{-\alpha T}$

мы имеем усечённый дискретный экспоненциальный импульс.

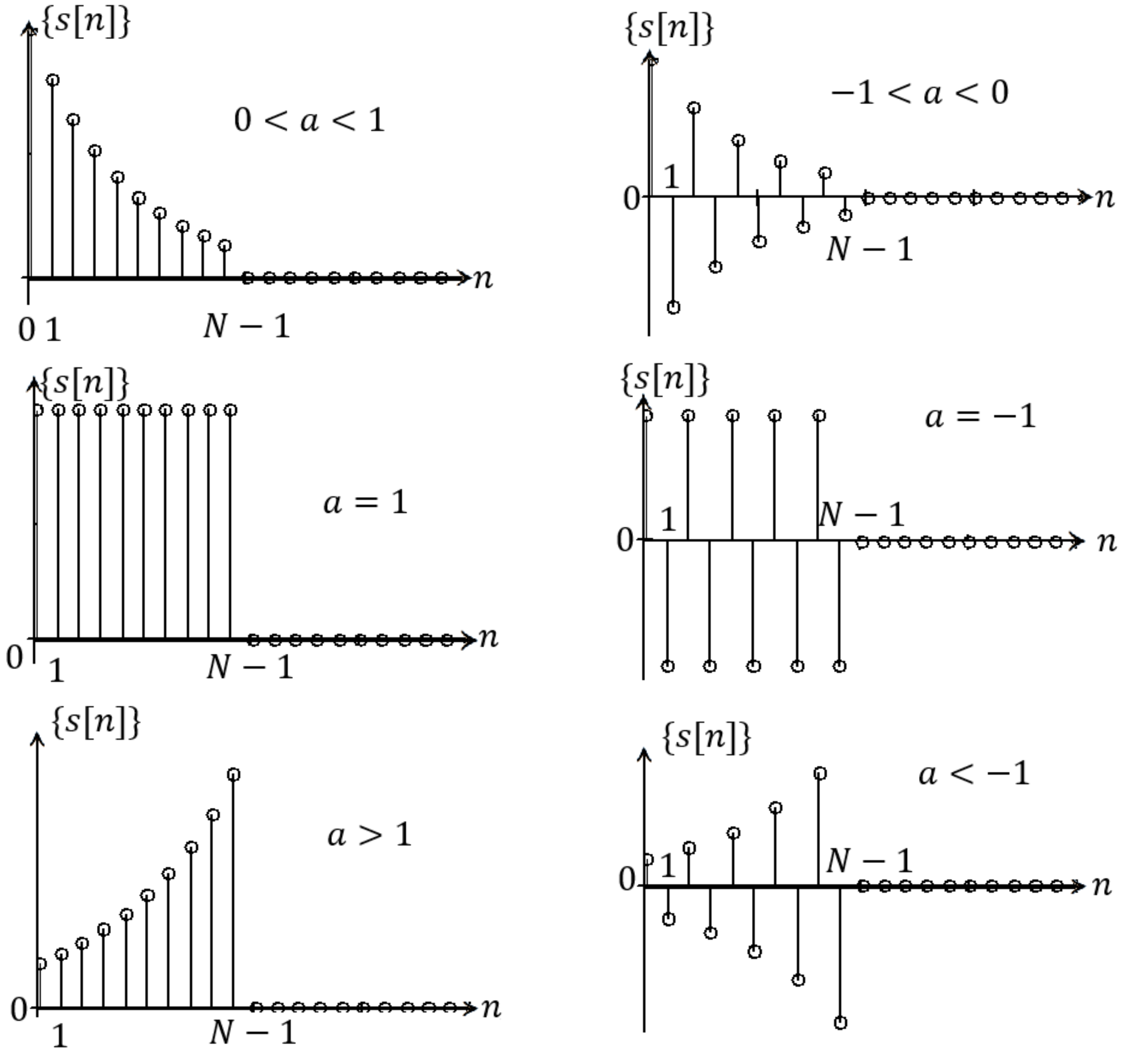

Рис.4.3. Временные диаграммы усечённых степенных последовательностей

Найдём Z-преобразование показательной последовательности:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n =$$

$$= \underbrace{1 + az^{-1} + (az^{-1})^2 + \ldots + (az^{-1})^{N-1}}_{\text{частичная сумма геометрической прогрессии } x_0=1,\ q=az^{-1}} = \frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}. \qquad (4.18)$$

Для дискретного прямоугольного импульса

$$S(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}. \qquad (4.19)$$

Для дискретного усечённого экспоненциального импульса

$$S(z) = \frac{1 - e^{-\alpha NT} z^{-N}}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}. \qquad (4.20)$$

В случае $N = 1$ и $a = 1$ показательная последовательность описывает единичный отсчёт

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}. \qquad (4.21)$$

Изображение единичного отсчёта

$$\Delta(z) = 1. \qquad (4.22)$$

Радиус сходимости $r_{\text{сх}} = 0$ и изображение в рассмотренных случаях существует на всей комплексной плоскости.

4.4.3. Показательная последовательность

Показательная последовательность описывается выражением

$$s[n] = \sigma[n] a^n, \qquad (4.23)$$

где $\sigma[n]$ - дискретный единичный скачок (дискретная функция Хевисайда):

$$\sigma[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}. \qquad (4.24)$$

Временные диаграммы сигналов, описываемых (4.23) аналогичны диаграммам на рис.4.3, с той разницей, что показательная последовательность нигде не обрывается и может рассматриваться, как предельный вариант усечённой последовательности при $N \to \infty$.

В частном случае $a = 1$ показательная последовательность описывает единичный скачок. В другом частном случае $a = e^{-\alpha T}$ имеем дискретный экспоненциальный импульс $s[n] = \sigma[n] e^{-\alpha nT}$.

Z-преобразование показательной последовательности найдём из (4.18) при $N \to \infty$:

$$S(z) = \lim_{N \to \infty} \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - a z^{-1}} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - a z^{-1}}, & |az^{-1}| < 1 \\ \infty, & |az^{-1}| \geq 1 \end{cases}. \qquad (4.25)$$

Область сходимости $|az^{-1}| < 1$ или $|z| > |a|$, откуда $r_{\text{сх}} = |a|$.

Для дискретного единичного скачка $\sigma[n]$

$$\Sigma(z)=\frac{1}{1-z^{-1}};\ r_{\text{сх}}=1. \tag{4.26}$$

Для дискретного экспоненциального импульса

$$S(z)=\frac{1}{1-e^{-\alpha T}z^{-1}};\ r_{\text{сх}}=e^{-\alpha T}. \tag{4.27}$$

4.4.4. Дискретный квазигармонический сигнал

Дискретный квазигармонический сигнал описывается выражением

$$u[n]=\sigma[n]a^{n}\cos(\omega_0 nT+\varphi_0). \tag{4.28}$$

Обозначив $s[n]=\sigma[n]a^{n}$, $S(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ изображение (4.28) найдём с учётом свойства (4.11):

$$\begin{aligned}U(z)&=\frac{1}{2}e^{j\varphi_0}S(ze^{-j\omega_0 T})+\frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}S(ze^{j\omega_0 T})=\\&=\frac{1}{2}\frac{e^{j\varphi_0}}{1-ae^{j\omega_0 T}z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{e^{-j\varphi_0}}{1-ae^{-j\omega_0 T}z^{-1}}=\\&=\frac{\cos\varphi_0-a\cos(\omega_0 T-\varphi_0)z^{-1}}{1-2a\cos(\omega_0 T)z^{-1}+a^2z^{-2}}\end{aligned} \tag{4.29}$$

Рассмотрим частные случаи (4.28) и (4.29):

1. $a=1;\ \varphi_0=0$

$$\sigma[n]\cos(\omega_0 nT)\leftrightarrow\frac{1-\cos(\omega_0 T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0 T)z^{-1}+z^{-2}}. \tag{4.30}$$

2. $a=1;\ \varphi_0=-\dfrac{\pi}{2}$

$$\sigma[n]\sin(\omega_0 nT)\leftrightarrow\frac{\sin(\omega_0 T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0 T)z^{-1}+z^{-2}}. \tag{4.31}$$

3. $a=e^{-\alpha T}$

$$\sigma[n]e^{-\alpha nT}\cos(\omega_0 nT+\varphi_0)\leftrightarrow \tag{4.32}$$

$$\leftrightarrow \frac{\cos\varphi_0 - e^{-\alpha T}\cos(\omega_0 T - \varphi_0) z^{-1}}{1 - 2e^{-\alpha T}\cos(\omega_0 T) z^{-1} + e^{-2\alpha T} z^{-2}}.$$

4.4.5. Дискретный линейно-нарастающий сигнал

Дискретный линейно-нарастающий сигнал описывается выражением

$$s[n] = n\sigma[n]. \qquad (4.33)$$

Изображение сигнала найдём с учётом свойства Z – преобразования (4.12) и предыдущего результата (4.26)

$$S(z) = Z\{n\sigma[n]\} = -z\frac{d}{dz}Z\{\Sigma[n]\} = -z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}. \qquad (4.34)$$

4.4.6. Пример нахождения обратного Z-преобразования

В качестве примера рассмотрим нахождение обратного Z-преобразования для

$$S(z) = \frac{z-b}{z(z-a)},$$

где $a \neq 0$ и $b \neq 0$- действительные числа.

Рассмотрим метод с использованием теоремы о вычетах. Подынтегральную функцию обратного Z – преобразования перепишем в виде:

$$f(z) = S(z)z^{n-1} = \frac{z-b}{z(z-a)}z^{n-1} = \frac{z-b}{z-a}z^{n-2}.$$

Заметим, что нам придётся рассматривать отдельно три случая: $n=0$, $n=1$ и $n>1$, поскольку в этих случаях количество полюсов $f(z)$ их кратность различны.

При $n=0$ функция $f(z)$ имеет два полюса $z_1 = a$ (кратности 1) и $z_2 = 0$ (кратности 2) им соответствуют вычеты:

$$\operatorname*{res}_{z_1=a}\left[\frac{z-b}{z-a}z^{-2}\right] = \frac{z-b}{\cancel{z-a}}z^{-2}\cancel{(z-a)}\Big|_{z=a} = \frac{a-b}{a^2},$$

$$\operatorname*{res}_{z_2=0}\left[\frac{z-b}{z-a}z^{-2}\right] = \frac{d}{dz}\frac{z-b}{z-a}\cancel{z^{-2}}\,\cancel{z^{2}}\Big|_{z=0} =$$

$$=\frac{(z-a)-(z-b)}{(z-a)^2}\cancel{z^{-2}}\,\cancel{z^2}\Bigg|_{z=0}=-\frac{a-b}{a^2}.$$

Оригинал в нуле $s[0]=\frac{a-b}{a^2}-\frac{a-b}{a^2}=0$.

При $n=1$ функция $f(z)$ имеет два полюса $z_1=a$ (кратности 1) и $z_2=0$ (кратности 1) им соответствуют вычеты:

$$\operatorname*{res}_{z_1=a}\left[\frac{z-b}{z-a}z^{-1}\right]=\frac{z-b}{\cancel{z-a}}z^{-1}\cancel{(z-a)}\Bigg|_{z=a}=\frac{a-b}{a},$$

$$\operatorname*{res}_{z_2=0}\left[\frac{z-b}{z-a}z^{-1}\right]=\frac{z-b}{z-a}\cancel{z^{-1}}\,\cancel{z}\Bigg|_{z=0}=\frac{b}{a}.$$

Оригинал $s[1]=\frac{a-b}{a}+\frac{b}{a}=1$.

При $n>1$ функция $f(z)$ имеет один полюс $z_1=a$ (кратности 1) ему соответствует вычет:

$$\operatorname*{res}_{z_1=a}\left[\frac{z-b}{z-a}z^{n-2}\right]=\frac{z-b}{\cancel{z-a}}z^{n-2}\cancel{(z-a)}\Bigg|_{z=a}=(a-b)a^{n-2}.$$

Оригинал $s[n]=(a-b)a^{n-2}$.

Полное выражение для оригинала, охватывающее все рассмотренные частные случаи имеет вид:

$$s[n]=\delta[n]+\sigma[n-2](a-b)a^{n-2}.$$

Рассмотрим метод обращения Z-преобразования, основанный на разложении изображения на простые дроби. Заданную функцию $S(z)$ преобразуем следующим образом:

$$S(z)=\frac{z-b}{z(z-a)}=\frac{1}{(z-a)}-\frac{b}{z(z-a)}=\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}-\frac{z^{-2}b}{1-az^{-1}}.$$

С учётом результата (4.25), свойств линейности (4.6) и запаздывания (4.7), получим:

$$Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}-\frac{z^{-2}b}{1-az^{-1}}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}\right\}-Z^{-1}\left\{\frac{z^{-2}b}{1-az^{-1}}\right\}=$$

$$=\sigma[n-1]a^{n-1}-\sigma[n-2]ba^{n-2}=\delta[n]+\sigma[n-2](a^{n-1}-ba^{n-2})=$$

$$=\delta[n]+\sigma[n-2](a-b)a^{n-2}.$$

4.4.7. Применение Z – преобразования для разрешения линейных рекуррентно заданных последовательностей

Линейная рекуррентно заданная последовательность описывается заданием выражения, которое определяет её члены как линейную комбинацию предыдущих, и начальных условий:

$$s[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k s[n-k],\ n > N-1,$$
$$s[0] = s_0, s[1] = s_1, \dots, s[N-1] = s_{N-1}, \qquad (4.35)$$

где a_k - коэффициенты линейной комбинации, $N \geq 1$ - порядок последовательности.

Доопределяя $s[n<0] = 0$, эти выражения можно собрать в одно, не накладывая никаких ограничений на n:

$$s[n] = s_0\delta[n] + (s_1 - s_0)\delta[n-1] + \dots$$
$$\dots + (s_{N-1} - \dots - s_1 - s_0)\delta[n-(N-1)] + \sum_{k=1}^{N} a_k s[n-k]. \qquad (4.36)$$

Взяв Z – преобразование (4.36) получим:

$$S(z) = s_0 + (s_1 - s_0)z^{-1} + \dots$$
$$\dots + (s_{N-1} - \dots - s_1 - s_0)z^{-(N-1)} + \sum_{k=1}^{N} a_k S(z) z^{-k},$$

Откуда

$$S(z) = \frac{s_0 + (s_1 - s_0)z^{-1} + \dots\dots + (s_{N-1} - \dots - s_1 - s_0)z^{-(N-1)}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}. \qquad (4.37)$$

Обратное Z – преобразование (4.37) позволяет найти общую формулу члена линейной рекуррентно заданной последовательности в замкнутом виде.

В качестве примера рассмотрим последовательность Фибоначчи. В ней каждый следующий член является суммой двух предыдущих $s[n] = s[n-1] + s[n-2]$, с начальными условиями $s_0 = 0,\ s_1 = 1$. В этом случае $a_1 = a_2 = 1,\ N = 2$ и (4.35) даёт

$$S(z) = \frac{s_0 + (s_1 - s_0)z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} =$$

$$= \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

где $z_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Выполним обратное Z-преобразование

$$s[n > 0] = Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)}\right\} = \operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{z z^{n-1}}{(z - z_1)(z - z_2)} +$$

$$+ \operatorname*{res}_{z=z_2} \frac{z z^{n-1}}{(z - z_1)(z - z_2)} = \left.\frac{z^n \cancel{(z - z_1)}}{\cancel{(z - z_1)}(z - z_2)}\right|_{z=z_1} + \left.\frac{z^n \cancel{(z - z_2)}}{(z - z_1)\cancel{(z - z_2)}}\right|_{z=z_2} =$$

$$= \frac{z_1^n}{z_1 - z_2} + \frac{z_2^n}{z_2 - z_1} = \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2}.$$