2. Математическое описание и спектр дискретного сигнала

2.1. Математическое описание дискретного сигнала

Дискретный сигнал представляет собой физический процесс или иным образом структурированную материю, которые отражают информацию о упорядоченной во времени последовательности данных.

В зависимости от специфики решаемой задачи дискретный сигнал может рассматриваться как физический процесс, связанный с некоторой системой проводников и диэлектриков – электрической цепью, характеризуемый напряжением или током в форме коротких импульсов с различным размахом. Временные

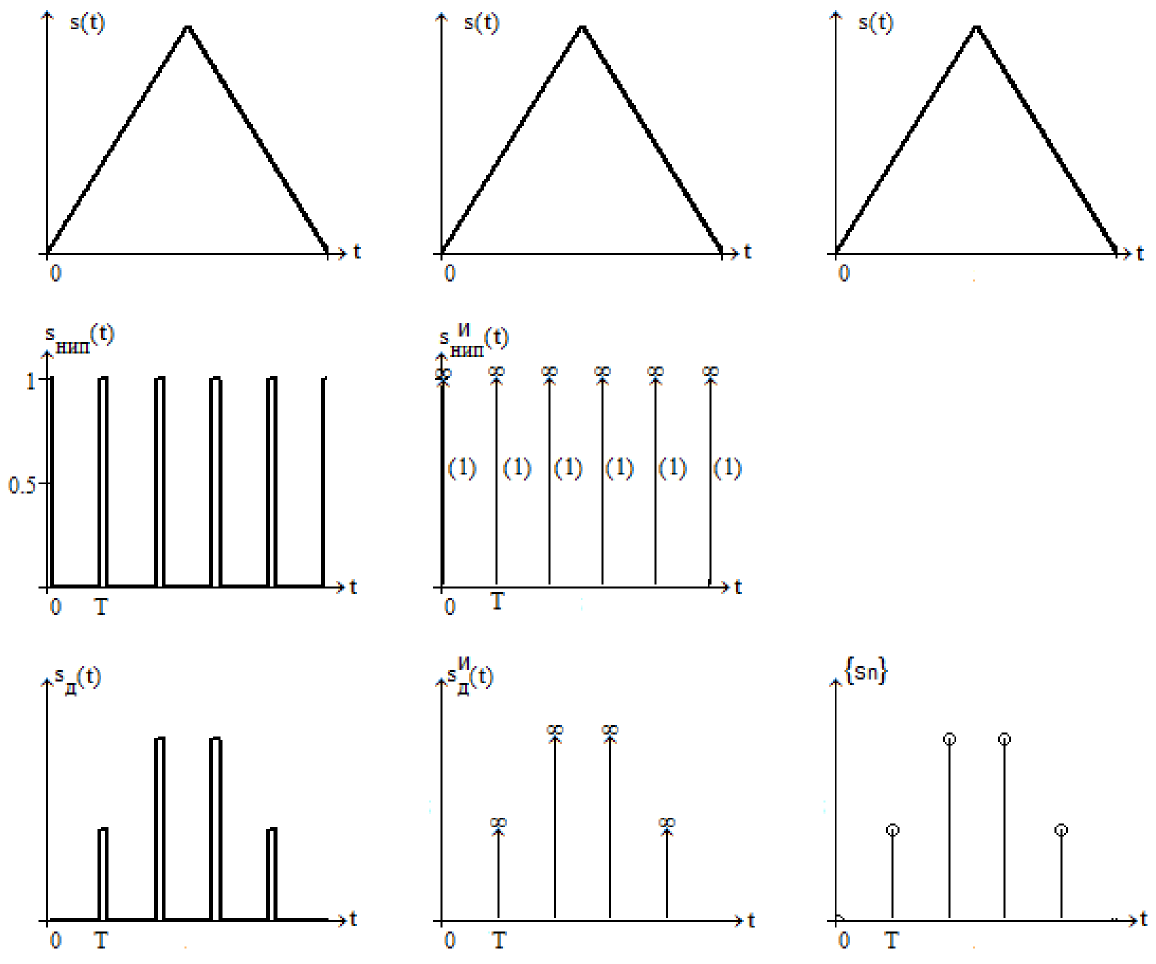

Рис.2.1. Временные диаграммы, соответствующие различным описаниям дискретного сигнала

диаграммы, для аналогового сигнала, несущей импульсной последовательности (НИП) и дискретного сигнала, соответствующие этому случаю показаны на рис.2.1. в левом столбце. Несущая импульсная последовательность $s_{нип}(t)$ представляет собой последовательность прямоугольных импульсов размахом V_0 периода T, длительность импульсов τ_0 гораздо меньше периода дискретизации:

$$s_{\text{нип}}(t) = V_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-nT}{\tau_0}\right),\ \tau_0 \ll T. \tag{2.1}$$

Дискретный сигнал получается перемножением НИП и аналогового сигнала:

$$\begin{aligned} s_{\text{д}}(t) = s(t)s_{\text{нип}}(t) = V_0 s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-nT}{\tau_0}\right) \approx \\ \approx V_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\text{rect}\left(\frac{t-nT}{\tau_0}\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Параметр V_0, если это не оговорено особо, будет предполагаться равным единице.

При теоретическом анализе используется также идеализированная модель дискретного сигнала, в которой полагается $V_0 = \dfrac{1}{\tau_0}$ и $\tau_0 \to 0$. При указанном выборе V_0 в пределе импульсы НИП являются бесконечно короткими и бесконечно высокими импульсами с единичной площадью – дельта импульсами (см. рис.2.1 средний столбец)

$$s_{\text{нип}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT), \tag{2.3}$$

а математическое описание дискретного сигнала имеет вид:

$$s_{\text{д}}(t) = s(t)s_{\text{нип}}(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\delta(t-nT). \tag{2.4}$$

Замена (2.2) на физически нереализуемую модель (2.4) позволяет упростить теоретический анализ и соответствует той асимптотике, которая имеет место при малой по сравнению с периодом дискретизации длительности импульса физически реализуемой НИП.

В тех случаях, когда дискретный сигнал рассматривается как совокупность данных (например, хранящихся в памяти ЭВМ), безотносительно особенностей структурирования связанной с ними материи, в качестве математической модели принимается последовательность чисел (иначе – решетчатая функция). Элементы последовательности будем обозначать $s(nT)$, когда требуется подчеркнуть связь с аналоговым сигналом $s(t)$ или $s[n]$ и s_n когда важно указать лишь номер элемента в последовательности. Выбор между $s[n]$ и s_n будет определяться исключительно соображениями читаемости формул и удобства. Если рассматривается вся последовательность целиком, то есть речь идёт о всех её элементах, то будут использоваться обозначения $\{s(nT)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{s[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{s_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$. Временная диаграмма, соответствующая рассмотренному случаю показана на рис.2.1 в третьем столбце.

Введённые математические модели дискретного сигнала между собой взаимосвязаны: последовательности чисел очевидным образом может быть поставлено в соответствие (2.2) или (2.4) и наоборот.

Обратим внимание, что понятие дискретного сигнала оказывается перегруженным: под дискретным сигналом может пониматься физический переносчик информации или математическая модель в виде функции времени или последовательности. Обычно, по виду временных диаграмм и обозначениям в формулах, нетрудно понять о какой математической модели идёт речь.

2.2. Спектр дискретного сигнала

Несущая импульсная последовательность (2.1) является периодической последовательностью прямоугольных импульсов. Представим её рядом Фурье в комплексной форме:

$$s_{\text{нип}}(t) = \frac{V_0 \tau_0}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_{\text{д}}\tau_0}{2}\right) e^{jk\omega_{\text{д}}t}. \qquad (2.5)$$

Рассмотрим дискретный сигнал (2.2):

$$s_{\text{д}}(t) = s(t)s_{\text{нип}}(t) = \frac{V_0 \tau_0}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_{\text{д}}\tau_0}{2}\right) s(t) e^{jk\omega_{\text{д}}t}.$$

Спектральную плотность дискретного сигнала найдём как его прямое преобразование Фурье, учитывая свойства линейности и смещения спектра:

$$\begin{aligned}S_д(\omega) = F\left\{s_д(t)\right\} = \\ = F\left\{\frac{V_0\tau_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_д\tau_0}{2}\right)s(t)e^{jk\omega_д t}\right\} = \\ = \frac{V_0\tau_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_д\tau_0}{2}\right)F\left\{s(t)e^{jk\omega_д t}\right\} = \\ = \frac{V_0\tau_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_д\tau_0}{2}\right)S(\omega-k\omega_д).\end{aligned} \tag{2.6}$$

При $V_0 = 1$ имеем:

$$S_д(\omega) = \frac{\tau_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_д\tau_0}{2}\right)S(\omega-k\omega_д). \tag{2.7}$$

В идеализированном случае, когда $V_0 = \dfrac{1}{\tau_0}$ и $\tau_0 \to 0$ от (2.6) переходим к

$$S_д(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\omega-k\omega_д). \tag{2.8}$$

Полученные выражения (2.7) и (2.8) дают взаимосвязь между спектрами дискретного и аналогового сигнала. На рис.2.2 в качестве примера показаны аналоговый сигнал и его спектр, дискретный сигнал в идеализированном случае и его спектр, дискретный сигнал и его спектр. Для наглядности рисунки выполнены для сигнала с трапецеидальным спектром. Поскольку такой сигнал обладает чётной симметрией, его спектральная плотность действительна, что и обеспечивает наглядность рисунков. Напомним, что в общем случае спектральная плотность аналогового сигнала является комплексной.

Рассмотрим сначала связь между спектрами аналогового и дискретного сигналов в идеализированном случае, определяемую (2.8). При $k = 0$ в сумме присутствует член $\dfrac{1}{T}S(\omega)$, значению $k = 1$ соответствует $\dfrac{1}{T}S(\omega-\omega_д)$ и т.д., значению $k = -1$ соответствует $\dfrac{1}{T}S(\omega+\omega_д)$ и т.д. Таким образом, спектр дискретного сигнала представляет собой наложение периодически с интервалом $\omega_д$ повторяющихся копий спектра аналогового сигнала с коэффициентом $\frac{1}{T}$.

В случае конечной длительности импульса несущей импульсной последовательности каждая k-я копия спектра аналогового сигнала, соответствующая частоте $k\omega_д$, входит в состав спектра дискретного сигнала с коэффициентом $\frac{\tau_0}{T}\operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_д\tau_0}{2}\right)$. Последовательность коэффициентов определяется спектром несущей импульсной последовательности. Нули огибающей последовательности коэффициентов кратны частотам $\frac{2\pi}{\tau_0}$. При выполнении условия $\tau_0 \ll T$ (на рис.2.2 для наглядности не соблюдается) оказывается выполненным условие $\omega_д \ll \frac{2\pi}{\tau_0}$ и в пределах нескольких периодов в окрестности нулевой частоты спектры сигналов в идеализированном и физически реализуемом случае совпадают.

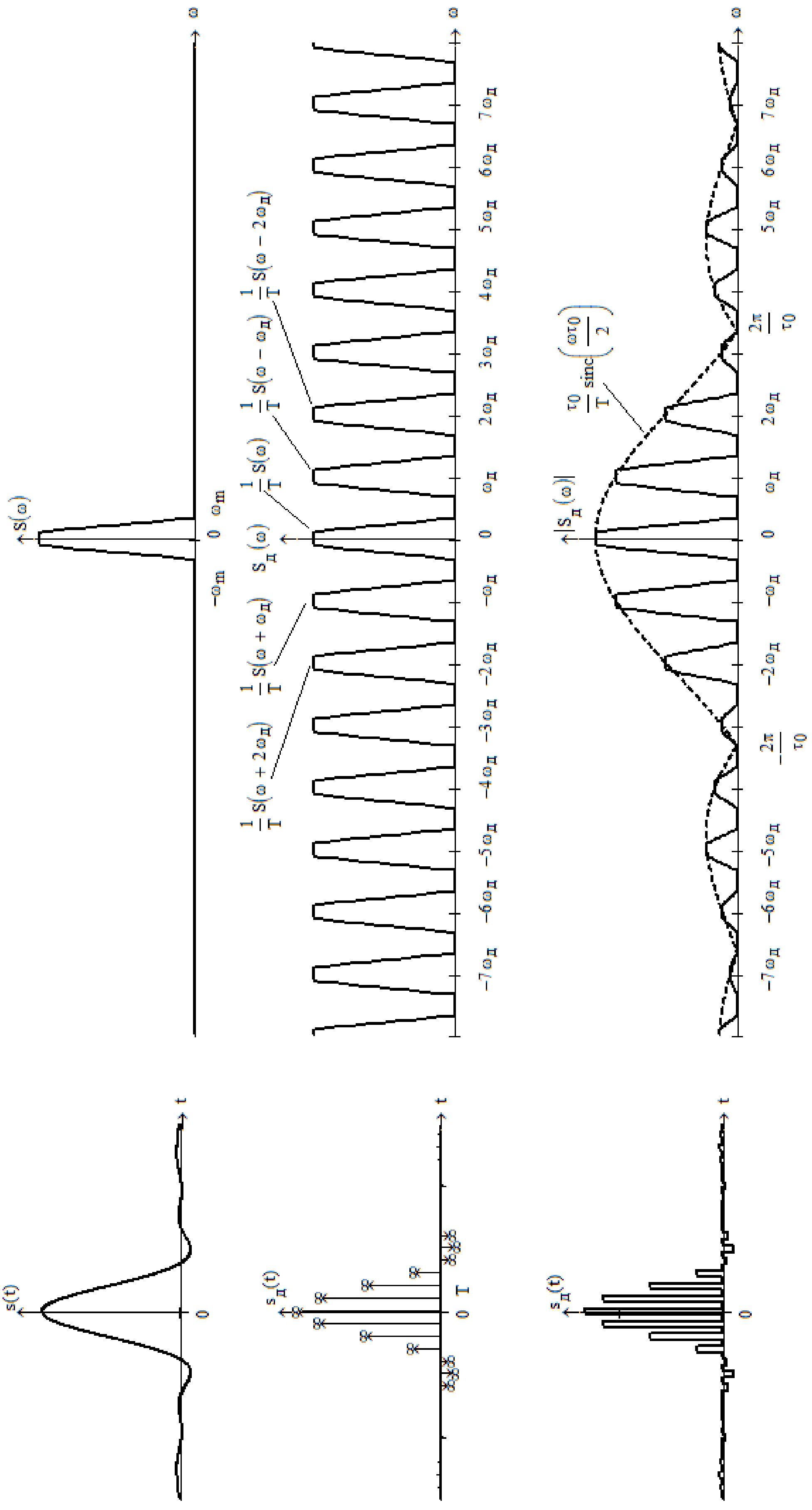

Рис.2.2. Спектры дискретного и аналогового сигналов