

Задание на курсовую работу

1. Определить амплитудный спектр видеоимпульса, построить его график.
2. Определить амплитудный спектр периодической последовательности видеоимпульсов со скважностью $Q = 5$, построить его график.
3. Определить амплитудный спектр радиоимпульса, построить его график.
4. Определить амплитудный спектр периодической последовательности радиоимпульсов, построить его график.
5. Определить автокорреляционную функцию заданного видеоимпульса, построить её график.
6. Записать выражение для спектра видеосигнала на выходе цепи заданного вида.

Исходные данные

Временная диаграмма заданного видеосигнала показана на рис.1, схема электрической цепи показана на рис.2. Значение параметра видеосигнала $t_1 = 1$ мс. При выполнении курсовой работы считаются известными спектральная плотность δ - импульса, спектральная плотность и корреляционная функция прямоугольного видеоимпульса, спектральная плотность и корреляционная функция экспоненциального видеоимпульса, спектральная плотность и корреляционная функция симметричного треугольного видеоимпульса ([1, табл.2.1, табл.3.1]).

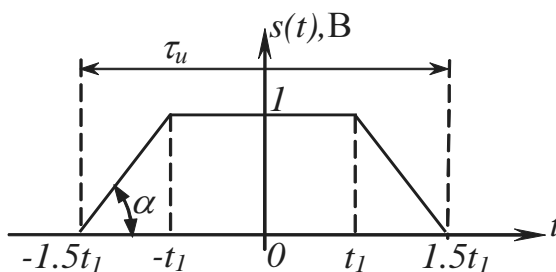


Рис.1. Заданный сигнал

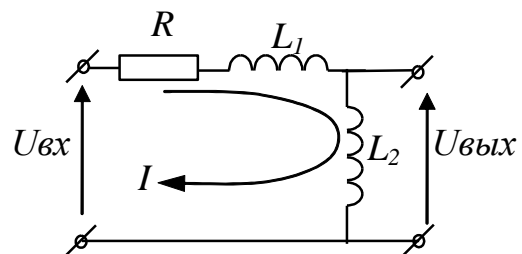


Рис.2. Заданная цепь

1. Амплитудный спектр видеоимпульса

Как видно из рис.1, на интервалах $[-1.5t_1, -t_1]$ и $[t_1, 1.5t_1]$ график

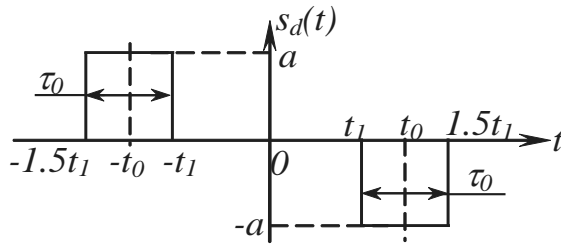


Рис.3. Результат дифференцирования заданного сигнала

заданного сигнала имеет линейно-изменяющиеся участки. Поэтому спектральную плотность проще определить для его производной, которая на этом участке будет представлять собой сигнал постоянного

уровня. На интервале $[-t_1, t_1]$ сигнал постоянный, поэтому его производная равна нулю. График производной заданного сигнала показан на рис.3. Значение a определяется скоростью изменения линейной функции, которая, как следует из рис.1, равна

$$a = tg(\alpha) = \frac{1}{0.5t_1} = \frac{6}{\tau_u} = 2 \text{ В/мс}, \quad (1.1)$$

где $\tau_u = 3t_1 = 3 \text{ мс}$ - длительность заданного сигнала.

Запишем аналитическое выражение для производной сигнала (рис.3.)

$$s_d(t) = a \text{rect}\left(\frac{t+t_0}{\tau_0}\right) - a \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau_0}\right), \quad (1.2)$$

где $\text{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 0.5 \\ 1, & |t| \leq 0.5 \end{cases}$ - симметричный прямоугольный видео-

импульс единичного размаха и длительности;

$$t_0 = \frac{t_1 + 1.5t_1}{2} = \frac{2.5t_1}{2} = \frac{5\tau_u}{12} = \frac{5}{4} = 1 \text{ мс} - \text{параметр сдвига (рис.3);}$$

$$\tau_0 = 1.5t_1 - t_1 = 0.5t_1 = \frac{\tau_u}{6} = 0.5 \text{ мс} - \text{длительность прямоугольных}$$

импульсов, составляющих сигнал.

Определим спектральную плотность $S_d(\omega)$ сигнала (1.2). Так как преобразование Фурье линейно, то достаточно найти спектральную плотность каждой из его аддитивных составляющих, а затем сложить результаты. Спектральная плотность сим-

метричного прямоугольного видеоимпульса длительностью τ_0 и размахом a известна по заданию на курсовую работу

$$\pm a \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \leftrightarrow \pm a \tau_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right), \quad (1.3)$$

где « \leftrightarrow » – знак соответствия оригинала и изображения по Фурье. С учётом свойства смещения сигнала для преобразования Фурье [1, табл. 2.3], запишем

$$\pm a \operatorname{rect}\left(\frac{t \pm t_0}{\tau_0}\right) \leftrightarrow \pm a \tau_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right) e^{\pm j \omega t_0}. \quad (1.4)$$

Используя последнее выражение, получим спектральную плотность производной сигнала

$$\begin{aligned} S_d(\omega) &= a \tau_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right) e^{j \omega t_0} - a \tau_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right) e^{-j \omega t_0} = \\ &= 2 j a \tau_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right) \left(\frac{e^{j \omega t_0} - e^{-j \omega t_0}}{2 j}\right) = \\ &= 2 j a \tau_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right) \sin(\omega t_0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для определения спектральной плотности заданного сигнала воспользуемся свойством дифференцирования сигнала [1, табл. 2.3], согласно которому

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{S_d(\omega)}{j \omega} = \frac{1}{j \omega} 2 j a \tau_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right) \sin(\omega t_0) = \\ &= 2 a \tau_0 t_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right) \frac{\sin(\omega t_0)}{\omega t_0} = 2 a \tau_0 t_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right) \operatorname{sinc}(\omega t_0) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подставим выражения параметров a , τ_0 и t_0 через длительность импульса τ_u

$$\begin{aligned} S(\omega) &= 2 \frac{6}{\tau_u} \frac{\tau_u}{6} \frac{5 \tau_u}{12} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_u}{2} \frac{\tau_u}{6}\right) \operatorname{sinc}\left(\omega \frac{5 \tau_u}{12}\right) = \\ &= \frac{5 \tau_u}{6} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_u}{12}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{5 \omega \tau_u}{12}\right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Амплитудный спектр непериодического сигнала определяется модулем его спектральной плотности, обращаясь к (1.7), получим

$$|S(\omega)| = \frac{5\tau_u}{6} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_u}{12}\right) \right| \cdot \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{5\omega\tau_u}{12}\right) \right|. \quad (1.8)$$

Фазовый спектр сигнала определяется аргументом его спектральной плотности

$$\varphi(\omega) = \arg S(\omega) = \pi \frac{1 - \operatorname{sign}\left(\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_u}{12}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{5\omega\tau_u}{12}\right)\right)}{2} \operatorname{sign}(\omega), \quad (1.9)$$

$$\text{где } \operatorname{sign}(\omega) = \begin{cases} -1, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ 1, & \omega > 0 \end{cases} \text{ - знаковая функция.}$$

График амплитудного спектра показан на рис.4. Пунктиром на графике показан уровень 0.1 от максимального значения амплитудного спектра. Ширина спектра заданного сигнала по этому уровню

$$\Delta\omega = 20 \frac{\text{рад}}{\text{мс}}. \quad (1.10)$$

2. Спектр периодической последовательности видеоимпульсов

Периодическая последовательность видеоимпульсов

$$s_{\Pi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t - kT) \quad (2.1)$$

с периодом $T = Q\tau_u = 5\tau_u = 5 \cdot 3 = 15$ мс (длительность сигнала определена в соответствии с рис.1) показана на рис.5. В основу спектрального анализа периодического сигнала положено его разложение в ряд Фурье, одной из форм которого, является тригонометрическая

$$s_{\Pi}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\Omega_n t + \varphi_n), \quad (2.2)$$

где амплитуды и фазы гармонических составляющих сигнала связаны со значениями спектральной плотности импульса, образующего последовательность соотношениями [1, (2.32)]

$$A_n = \frac{2}{T} |S(\Omega_n)|, \quad (2.3)$$

$$\varphi_n = \varphi(\Omega_n); \quad (2.4)$$

T - период сигнала;

$\Omega_n = n\Omega_1 = 2\pi n/T$ - частота n -ой гармоники;

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{15} = \frac{6.28}{15} = 0.4187 \frac{\text{рад}}{\text{мс}} - \text{частота первой гармоники.}$$

Совокупность гармонических составляющих (членов ряда Фурье) сигнала называется его спектром. Совокупность амплитуд гармонических составляющих $\left\{ \frac{A_0}{2}, A_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ называется амплитудным спектром периодического сигнала, совокупность фаз $\{\varphi_0 = 0, \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ гармонических составляющих называется фазовым спектром сигнала.

Используя выражения (1.8) и (1.9), получим

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \frac{5\tau_u}{6} \left| \text{sinc} \left(\frac{\Omega_n \tau_u}{12} \right) \right| \cdot \left| \text{sinc} \left(\frac{5\Omega_n \tau_u}{12} \right) \right| = \\ &= \frac{5\tau_u}{3T} \left| \text{sinc} \left(\frac{2\pi n \tau_u}{12T} \right) \right| \cdot \left| \text{sinc} \left(\frac{5 \cdot 2\pi n \tau_u}{12T} \right) \right| = , \quad (2.5) \\ &= \frac{5}{3Q} \left| \text{sinc} \left(\frac{\pi n}{6Q} \right) \right| \cdot \left| \text{sinc} \left(\frac{5\pi n}{6Q} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \pi \frac{1 - \text{sign} \left(\text{sinc} \left(\frac{\Omega_n \tau_u}{12} \right) \text{sinc} \left(\frac{5\Omega_n \tau_u}{12} \right) \right)}{2} = \\ &= \pi \frac{1 - \text{sign} \left(\text{sinc} \left(\frac{\pi n}{6Q} \right) \text{sinc} \left(\frac{5\pi n}{6Q} \right) \right)}{2} . \quad (2.6) \end{aligned}$$

где $Q = \frac{T}{\tau_u} = 5$ - скважность периодического сигнала.

График амплитудного спектра периодической последовательности видеоимпульсов показан на рис.5. Пунктиром показана огибающая спектральных линий.

3. Спектральная плотность радиоимпульса

Временная диаграмма радиоимпульса, огибающей которого является заданный видеоимпульс

$$u(t) = s(t) \cos(\omega_0 t), \quad (3.1)$$

где ω_0 - частота несущего колебания, приведена на рис.6, частотное заполнение показано условно, так чтобы обеспечить читаемость рисунка. Пунктиром показана огибающая радиоимпульса и её зеркальное отражение относительно оси абсцисс.

Если выполняется условие

$$\Delta\omega \ll \omega_0, \quad (3.2)$$

то спектральную плотность радиоимпульса можно определить через спектральную плотность соответствующего видеоимпульса с помощью выражения [1, (6.19)]

$$U(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} S(\omega - \omega_0), & \omega > 0 \\ \frac{1}{2} S^*(\omega + \omega_0), & \omega < 0 \end{cases}. \quad (3.3)$$

Для обеспечения условия (3.2) необходимо чтобы частота несущего колебания во много раз превышала ширину спектра огибающей радиоимпульса. Выбираем частоту несущего колебания

$$\omega_0 = 100\Delta\omega = 100 \cdot 20 = 2000 \frac{\text{рад}}{\text{мс}}. \quad (3.4)$$

С учетом выражения для спектральной плотности видеоимпульса (1.7), полученного в п.1, запишем

$$U(\omega) = \begin{cases} \frac{5\tau_u}{6} \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau_u}{12}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{5(\omega - \omega_0)\tau_u}{12}\right), & \omega > 0 \\ \frac{5\tau_u}{6} \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0)\tau_u}{12}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{5(\omega + \omega_0)\tau_u}{12}\right), & \omega < 0 \end{cases}. \quad (3.5)$$

Для амплитудного спектра радиоимпульса получим

$$|U(\omega)| = \begin{cases} \frac{5\tau_u}{6} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau_u}{12}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{5(\omega - \omega_0)\tau_u}{12}\right) \right|, & \omega > 0 \\ \frac{5\tau_u}{6} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0)\tau_u}{12}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{5(\omega + \omega_0)\tau_u}{12}\right) \right|, & \omega < 0 \end{cases}, \quad (3.4)$$

для фазового спектра

$$\psi(\omega) = \begin{cases} \pi \frac{1 - \operatorname{sign}\left(\operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau_u}{12}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{5(\omega - \omega_0)\tau_u}{12}\right)\right)}{2} \operatorname{sign}(\omega - \omega_0), & \omega > 0 \\ \pi \frac{1 - \operatorname{sign}\left(\operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0)\tau_u}{12}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{5(\omega + \omega_0)\tau_u}{12}\right)\right)}{2} \operatorname{sign}(\omega + \omega_0), & \omega < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

График амплитудного спектра радиоимпульса показан на рис.6. в окрестности частоты ω_0 . В окрестности частоты $-\omega_0$ амплитудный спектр будет симметричным.

4. Спектр периодической последовательности радиоимпульсов

Временная диаграмма периодической последовательности радиоимпульсов

$$u_{\Pi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t - kT) \quad (4.1)$$

показана на рис.7. Период следования радиоимпульсов определен в п.2, частота несущего колебания – в п.3. При спектральном анализе периодическая последовательность радиоимпульсов представляется в виде ряда [1, (7.16)]

$$u_{\Pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n \cos[(\omega_0 + \Omega_n)t + \psi_n], \quad (4.2)$$

где амплитуды $\{V_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ и фазы $\{\psi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ гармонических составляющих связаны с амплитудами $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ и фазами $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ гармонических составляющих ряда Фурье для соответствующей периодической последовательности видеоимпульсов соотношениями

$$V_n = V_{-n} = \frac{A_{|n|}}{2}; \quad \psi_n = \varphi_{|n|} \text{sign}(n), \quad (4.3)$$

$$\text{где } \text{sign}(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases} \text{ - знаковая функция.}$$

Используя эти соотношения, а также выражения (2.5) и (2.6), полученные в п.2, запишем

$$V_n = \frac{5}{6Q} \left| \text{sinc} \left(\frac{\pi n}{6Q} \right) \right| \cdot \left| \text{sinc} \left(\frac{5\pi n}{6Q} \right) \right|, \quad (4.4)$$

$$\psi_n = \pi \frac{1 - \text{sign} \left(\text{sinc} \left(\frac{\pi n}{6Q} \right) \text{sinc} \left(\frac{5\pi n}{6Q} \right) \right)}{2} \text{sign}(n). \quad (4.5)$$

Амплитудный спектр периодической последовательности радиоимпульсов показан на рис.7. Пунктиром показана огибающая спектральных линий.

5. Корреляционная функция видеосигнала

Определим спектральную плотность энергии заданного импульса

$$\begin{aligned} W(\omega) &= S(\omega)S^*(\omega) = \frac{25\tau_u^2}{36} \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega\tau_u}{12} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{5\omega\tau_u}{12} \right) = \\ &= \frac{25\tau_u^2}{36} \frac{\sin^2(\omega\tau_u/12) \sin^2(5\omega\tau_u/12)}{(\omega\tau_u/12)^2 (5\omega\tau_u/12)^2} = \\ &= \frac{25\tau_u^2}{36} \frac{144}{\omega^2\tau_u^2} \frac{144}{25\omega^2\tau_u^2} \sin^2 \left(\frac{\omega\tau_u}{12} \right) \sin^2 \left(\frac{5\omega\tau_u}{12} \right) = \\ &= \frac{576}{\omega^4\tau_u^2} \sin^2 \left(\frac{\omega\tau_u}{12} \right) \sin^2 \left(\frac{5\omega\tau_u}{12} \right) \frac{j^4}{j^4} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{576}{(j\omega)^4 \tau_u^2} \left(\frac{e^{j\frac{\omega\tau_u}{12}} - e^{-j\frac{\omega\tau_u}{12}}}{2j} \cdot \frac{e^{j\frac{5\omega\tau_u}{12}} - e^{-j\frac{5\omega\tau_u}{12}}}{2j} \right)^2 = \\
&= \frac{576}{(j\omega)^4 \tau_u^2 16} \left(e^{j\frac{\omega\tau_u}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau_u}{3}} - e^{j\frac{\omega\tau_u}{3}} + e^{-j\frac{\omega\tau_u}{2}} \right)^2 = \\
&= \frac{36}{(j\omega)^4 \tau_u^2} \left(e^{j\frac{\omega\tau_u}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau_u}{3}} - e^{j\frac{\omega\tau_u}{3}} + e^{-j\frac{\omega\tau_u}{2}} \right)^2 = \\
&= \frac{36}{(j\omega)^4 \tau_u^2} \left(e^{j\omega\tau_u} + e^{-j\omega\tau_u} - 2e^{j\frac{5\omega\tau_u}{6}} - 2e^{-j\frac{5\omega\tau_u}{6}} + \right. \\
&\quad \left. + e^{j\frac{2\omega\tau_u}{3}} + e^{-j\frac{2\omega\tau_u}{3}} - 2e^{j\frac{\omega\tau_u}{6}} - 2e^{-j\frac{\omega\tau_u}{6}} + 4 \right)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Автокорреляционную функцию (АКФ) можно определить как обратное преобразование Фурье спектральной плотности энергии

$$R(\tau) \leftrightarrow W(\omega). \tag{5.2}$$

Для выполнения обратного преобразования Фурье воспользуемся аппаратом преобразования Фурье неинтегрируемых функций [1, п.2.3], в основу которого положено формальное определение спектральной плотности функций, не удовлетворяющих условию квадратичной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt < \infty. \tag{5.3}$$

В [1, табл.2.2] указано, что

$$\text{sign}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}. \tag{5.4}$$

Воспользовавшись свойством преобразования Фурье [1, табл.2.3, 10]

$$s_0(t) \leftrightarrow S_0(\omega) \Rightarrow t^n s_0(t) \leftrightarrow (j)^n \frac{d^n S_0(\omega)}{d\omega^n}, \quad (5.5)$$

получим

$$\begin{aligned} t^n \operatorname{sign}(t) &\leftrightarrow 2(j)^{n-1} \frac{d^n}{d\omega^n} \frac{1}{\omega} = 2(j)^{n-1} \frac{(-1)^n n!}{\omega^{n+1}} = j^{-2} (j)^{n+1} \frac{(-1)^n 2n!}{\omega^{n+1}} = \\ &= j^{-2} (j)^{n+1} (j)^{n+1} \frac{(-1)^n 2n!}{(j\omega)^{n+1}} = 2 \frac{1}{j^2} (j^2)^{n+1} \frac{(-1)^n 2n!}{(j\omega)^{n+1}} = \\ &= (-1)(-1)^{n+1} (-1)^n \frac{2n!}{(j\omega)^{n+1}} = (-1)^{n+1} (-1)^{n+1} \frac{2n!}{(j\omega)^{n+1}} = \frac{2n!}{(j\omega)^{n+1}} \end{aligned}$$

Поделив сигнал и спектральную плотность в последнем выражении на $2n!$, запишем

$$\frac{1}{2n!} t^n \operatorname{sign}(t) \leftrightarrow \frac{1}{(j\omega)^{n+1}}. \quad (5.6)$$

Определим обратное преобразование Фурье для каждого члена, входящего в выражение для $W(\omega)$, учитывая, где это необходимо, свойство смещения:

$$\frac{e^{\pm j\omega\tau_u}}{(j\omega)^4} = \frac{e^{\pm j\omega\tau_u}}{(j\omega)^{n+1}} \Big|_{n=3} \leftrightarrow \frac{1}{12} (\tau \pm \tau_u)^3 \operatorname{sign}(\tau \pm \tau_u); \quad (5.7.a)$$

$$\frac{-2e^{j\frac{5\omega\tau_u}{6}}}{(j\omega)^4} = \frac{-2e^{j\frac{5\omega\tau_u}{6}}}{(j\omega)^{n+1}} \Big|_{n=3} \leftrightarrow -\frac{1}{6} \left(\tau \pm \frac{5\tau_u}{6}\right)^3 \operatorname{sign}\left(\tau \pm \frac{5\tau_u}{6}\right); \quad (5.7.б)$$

$$\frac{e^{\pm j\frac{2\omega\tau_u}{3}}}{(j\omega)^4} = \frac{e^{\pm j\frac{2\omega\tau_u}{3}}}{(j\omega)^{n+1}} \Big|_{n=3} = \frac{1}{12} \left(\tau \pm \frac{2\tau_u}{3}\right)^3 \operatorname{sign}\left(\tau \pm \frac{2\tau_u}{3}\right); \quad (5.7.в)$$

$$\frac{-2e^{\pm j\frac{\omega\tau_u}{6}}}{(j\omega)^4} = \frac{-2e^{\pm j\frac{\omega\tau_u}{6}}}{(j\omega)^{n+1}} \Big|_{n=3} \leftrightarrow -\frac{1}{6} \left(\tau \pm \frac{\tau_u}{6}\right)^3 \operatorname{sign}\left(\tau \pm \frac{\tau_u}{6}\right); \quad (5.7.г)$$

$$\frac{4}{(j\omega)^4} = \frac{4}{(j\omega)^{n+1}} \Big|_{n=3} \leftrightarrow \frac{1}{3} \tau^3 \operatorname{sign}(\tau); \quad (5.7.д)$$

Найдём выражение правой ветви АКФ $R^+(\tau) = R(\tau)|_{\tau \geq 0}$ с учётом свойства линейности преобразования Фурье. Заметим, что при $\tau \geq 0$ выполняется равенство $\text{sign}(\tau + \tau_0) = 1$ для любого $\tau_0 > 0$, тогда из (5.1), с использованием (5.7.а-д), получим

$$\begin{aligned} R^+(\tau) &= \frac{3}{\tau_u^2}(\tau + \tau_u)^3 + \frac{3}{\tau_u^2}(\tau - \tau_u)^3 \text{sign}(\tau - \tau_u) - \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau + \frac{5\tau_u}{6} \right)^3 - \\ &- \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau - \frac{5\tau_u}{6} \right)^3 \text{sign} \left(\tau - \frac{5\tau_u}{6} \right) + \frac{3}{\tau_u^2} \left(\tau + \frac{2\tau_u}{3} \right)^3 + \frac{3}{\tau_u^2} \left(\tau - \frac{2\tau_u}{3} \right)^3 \text{sign} \left(\tau - \frac{2\tau_u}{3} \right) - \\ &- \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau + \frac{\tau_u}{6} \right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau - \frac{\tau_u}{6} \right)^3 \text{sign} \left(\tau - \frac{\tau_u}{6} \right) + \frac{12}{\tau_u^2} \tau^3 \end{aligned}$$

На интервале $0 \leq \tau \leq \tau_u/6$

$$\begin{aligned} R^+(\tau) &= \frac{3}{\tau_u^2}(\tau + \tau_u)^3 - \frac{3}{\tau_u^2}(\tau - \tau_u)^3 - \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau + \frac{5\tau_u}{6} \right)^3 + \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau - \frac{5\tau_u}{6} \right)^3 \\ &+ \frac{3}{\tau_u^2} \left(\tau + \frac{2\tau_u}{3} \right)^3 - \frac{3}{\tau_u^2} \left(\tau - \frac{2\tau_u}{3} \right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau + \frac{\tau_u}{6} \right)^3 + \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau - \frac{\tau_u}{6} \right)^3 + \frac{12}{\tau_u^2} \tau^3 = \\ &= \frac{12\tau^3}{\tau_u^2} - \frac{6\tau^2}{\tau_u} + \frac{7}{9}\tau_u \end{aligned}$$

На интервале $\tau_u/6 \leq \tau \leq 2\tau_u/3$

$$\begin{aligned} R^+(\tau) &= \frac{3}{\tau_u^2}(\tau + \tau_u)^3 - \frac{3}{\tau_u^2}(\tau - \tau_u)^3 - \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau + \frac{5\tau_u}{6} \right)^3 + \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau - \frac{5\tau_u}{6} \right)^3 \\ &+ \frac{3}{\tau_u^2} \left(\tau + \frac{2\tau_u}{3} \right)^3 - \frac{3}{\tau_u^2} \left(\tau - \frac{2\tau_u}{3} \right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau + \frac{\tau_u}{6} \right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau - \frac{\tau_u}{6} \right)^3 + \frac{12}{\tau_u^2} \tau^3 = \\ &= -\tau + \frac{5}{6}\tau_u \end{aligned}$$

На интервале $2\tau_u/3 \leq \tau \leq 5\tau_u/6$

$$\begin{aligned} R^+(\tau) &= \frac{3}{\tau_u^2}(\tau + \tau_u)^3 - \frac{3}{\tau_u^2}(\tau - \tau_u)^3 - \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau + \frac{5\tau_u}{6} \right)^3 + \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau - \frac{5\tau_u}{6} \right)^3 + \\ &+ \frac{3}{\tau_u^2} \left(\tau + \frac{2\tau_u}{3} \right)^3 + \frac{3}{\tau_u^2} \left(\tau - \frac{2\tau_u}{3} \right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau + \frac{\tau_u}{6} \right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2} \left(\tau - \frac{\tau_u}{6} \right)^3 + \frac{12}{\tau_u^2} \tau^3 = \\ &= \frac{6\tau^3}{\tau_u^2} - \frac{12\tau^2}{\tau_u} + 7\tau - \frac{17}{18}\tau_u \end{aligned}$$

На интервале $5\tau_u/6 \leq \tau \leq \tau_u$

$$\begin{aligned} R^+(\tau) &= \frac{3}{\tau_u^2}(\tau + \tau_u)^3 - \frac{3}{\tau_u^2}(\tau - \tau_u)^3 - \frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau + \frac{5\tau_u}{6}\right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau - \frac{5\tau_u}{6}\right)^3 + \\ &+ \frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau + \frac{2\tau_u}{3}\right)^3 + \frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau - \frac{2\tau_u}{3}\right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau + \frac{\tau_u}{6}\right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau - \frac{\tau_u}{6}\right)^3 + \frac{12}{\tau_u^2}\tau^3 = \\ &= -\frac{6\tau^3}{\tau_u^2} + \frac{18\tau^2}{\tau_u} - 18\tau - 6\tau_u \end{aligned}$$

На интервале $\tau \geq \tau_u$

$$\begin{aligned} R^+(\tau) &= \frac{3}{\tau_u^2}(\tau + \tau_u)^3 + \frac{3}{\tau_u^2}(\tau - \tau_u)^3 \operatorname{sign}(\tau - \tau_u) - \frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau + \frac{5\tau_u}{6}\right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau - \frac{5\tau_u}{6}\right)^3 + \\ &+ \frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau + \frac{2\tau_u}{3}\right)^3 + \frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau - \frac{2\tau_u}{3}\right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau + \frac{\tau_u}{6}\right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau - \frac{\tau_u}{6}\right)^3 + \frac{12}{\tau_u^2}\tau^3 = 0 \end{aligned}$$

Выражение, описывающее АКФ заданного сигнала при любом значении τ получим с учётом свойства её чётной симметрии путём симметрирования полученного выражения $R^+(\tau)$

$$R(\tau) = R^+(|\tau|) = \begin{cases} \frac{12|\tau|^3}{\tau_u^2} - \frac{6\tau^2}{\tau_u} + \frac{7}{9}\tau_u, & 0 \leq |\tau| \leq \frac{\tau_u}{6} \\ -|\tau| + \frac{5}{6}\tau_u, & \frac{\tau_u}{6} \leq |\tau| \leq \frac{2\tau_u}{3} \\ \frac{6|\tau|^3}{\tau_u^2} - \frac{12\tau^2}{\tau_u} + 7|\tau| - \frac{17}{18}\tau_u, & \frac{2\tau_u}{3} \leq |\tau| \leq \frac{5\tau_u}{6} \\ -\frac{6|\tau|^3}{\tau_u^2} + \frac{18\tau^2}{\tau_u} - 18|\tau| - 6\tau_u, & \frac{5\tau_u}{6} \leq |\tau| \leq \tau_u \\ 0, & \tau \geq \tau_u \end{cases} \quad (5.8)$$

График АКФ показан на рис.8.

6. Прохождение видеосигнала через линейную цепь

Спектральная плотность сигнала на выходе цепи определяется путем умножения ее комплексной частотной характеристики (КЧХ) на спектральную плотность входного сигнала [2,(5.20)]

$$S_{\text{ВЫХ}}(\omega) = H(\omega)S_{\text{ВХ}}(\omega). \quad (6.1)$$

Для определения КЧХ цепи следует рассмотреть ее при гармоническом воздействии и найти отношение комплексных амплитуд выходного и входного сигналов. Обращаясь к рис.2. запишем

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ}} = \frac{\dot{U}_{\text{ВХ}} j\omega L_2}{R + j\omega(L_1 + L_2)}, \quad (6.2)$$

Определим КЧХ

$$H(\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{j\omega L_2}{R + j\omega(L_1 + L_2)}. \quad (6.3)$$

Обозначив $H_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = \frac{L_2}{L_1 + L_2}$ - асимптотическое значение

КЧХ, преобразуем (6.3)

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{H_\infty}{H_\infty} \frac{j\omega L_2}{R + j\omega(L_1 + L_2)} = H_\infty \frac{L_1 + L_2}{L_2} \frac{j\omega L_2}{R + j\omega(L_1 + L_2)} = \\ &= H_\infty \frac{j\omega}{\frac{R}{L_1 + L_2} + j\omega} = \frac{H_\infty}{\frac{R}{j\omega(L_1 + L_2)} + 1} = \frac{H_\infty}{1 + \frac{1}{j\omega\tau}}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $\tau = \frac{L_1 + L_2}{R}$ - постоянная времени цепи.

АЧХ и ФЧХ цепи

$$|H(\omega)| = \frac{H_\infty}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}}; \quad \psi(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{1}{\omega\tau}\right). \quad (6.5)$$

Графики АЧХ и ФЧХ показаны на рис.10.

При анализе цепей входной сигнал должен быть отличен от нуля только для $t \geq 0$, поэтому заданный сигнал следует сдвинуть вправо на $\tau_u/2$. Используя свойство смещения для преобразования Фурье и (1.7) запишем выражение спектральной плотности входного сигнала

$$S_{\text{ВХ}}(\omega) = \frac{5\tau_u}{6} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_u}{12}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{5\omega\tau_u}{12}\right) e^{-j\omega\frac{\tau_u}{2}}. \quad (6.6)$$

Спектральная плотность сигнала на выходе цепи

$$S_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \frac{5\tau_u}{6} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_u}{12}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{5\omega\tau_u}{12}\right) e^{-j\omega\frac{\tau_u}{2}} \frac{H_\infty}{1 + \frac{1}{j\omega\tau}}. \quad (6.7)$$

Список литературы

1. Денисенко А.Н., Стеценко О.А. Теоретическая радиотехника: Справочное пособие Ч.1: Детерминированные сигналы (методы анализа). - М.: Издательство стандартов, 1993. - 215 с.
2. Денисенко А.Н., Стеценко О.А. Линейные радиотехнические цепи: Учеб. пособие/ Моск. ин-т радиотехники, электроники и автоматики. - М., 1992. - 78 с.

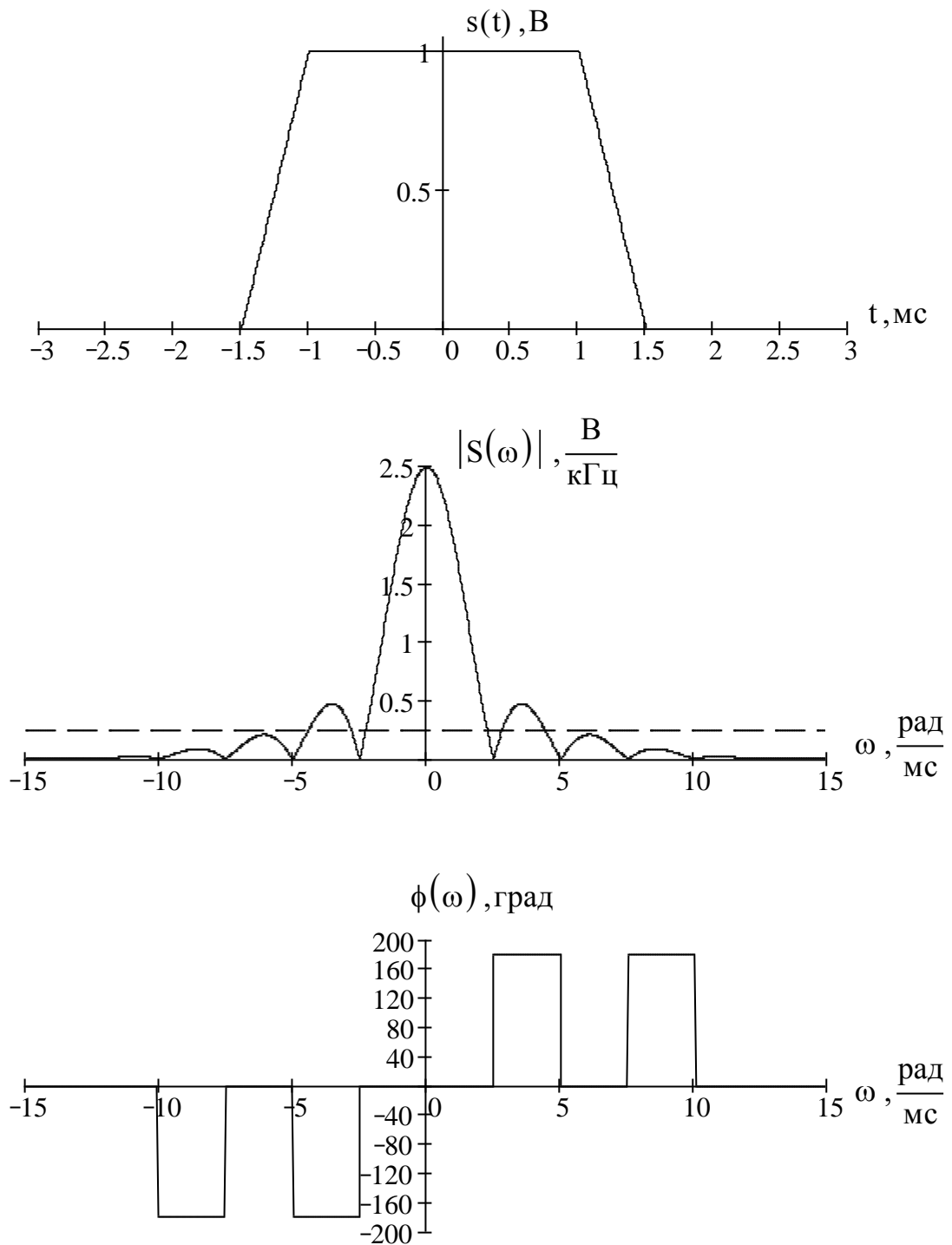


Рис.4. Видеоимпульс и его амплитудный и фазовый спектры

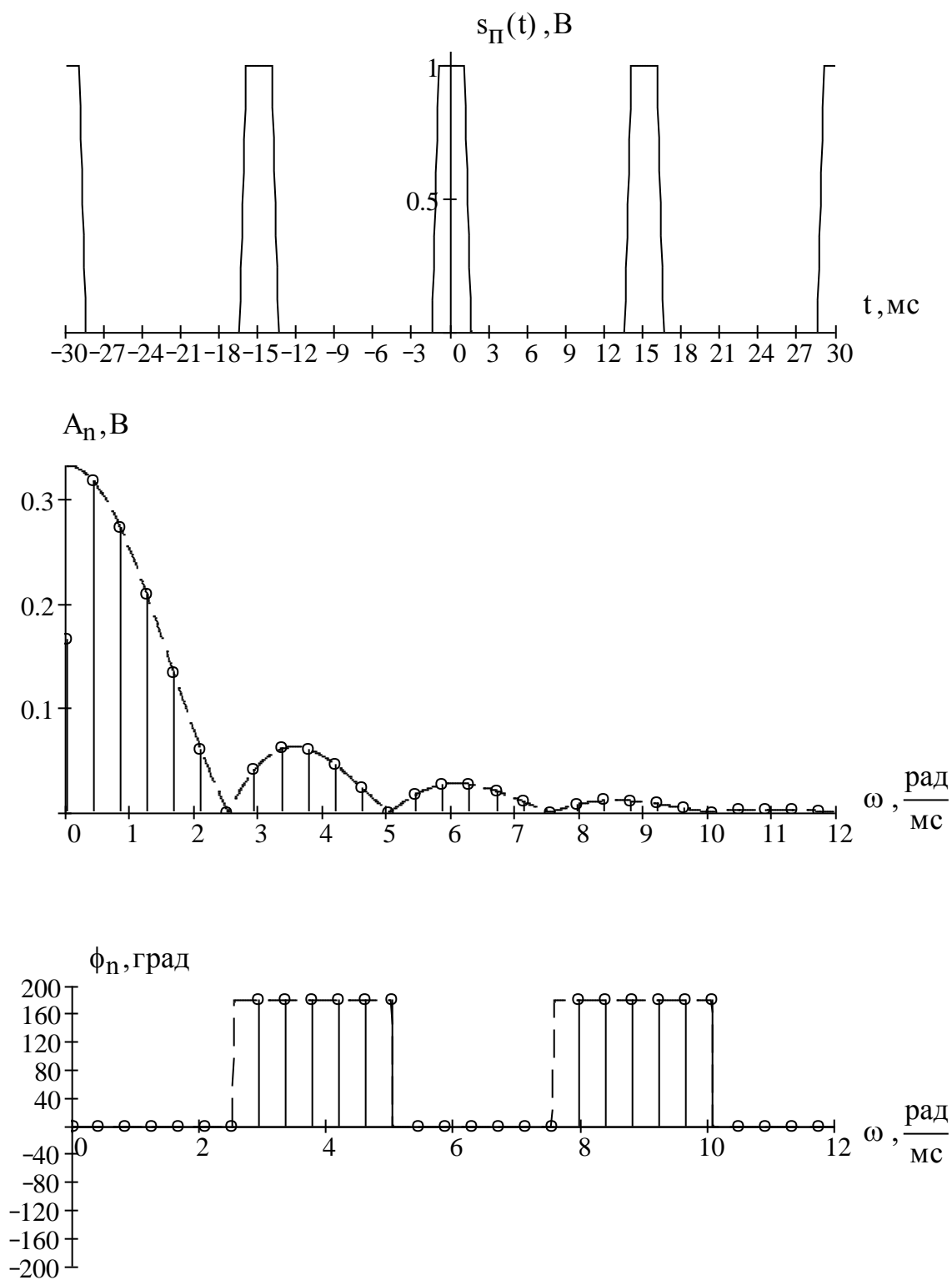


Рис.5. Периодический сигнал и его амплитудный и фазовый спектры

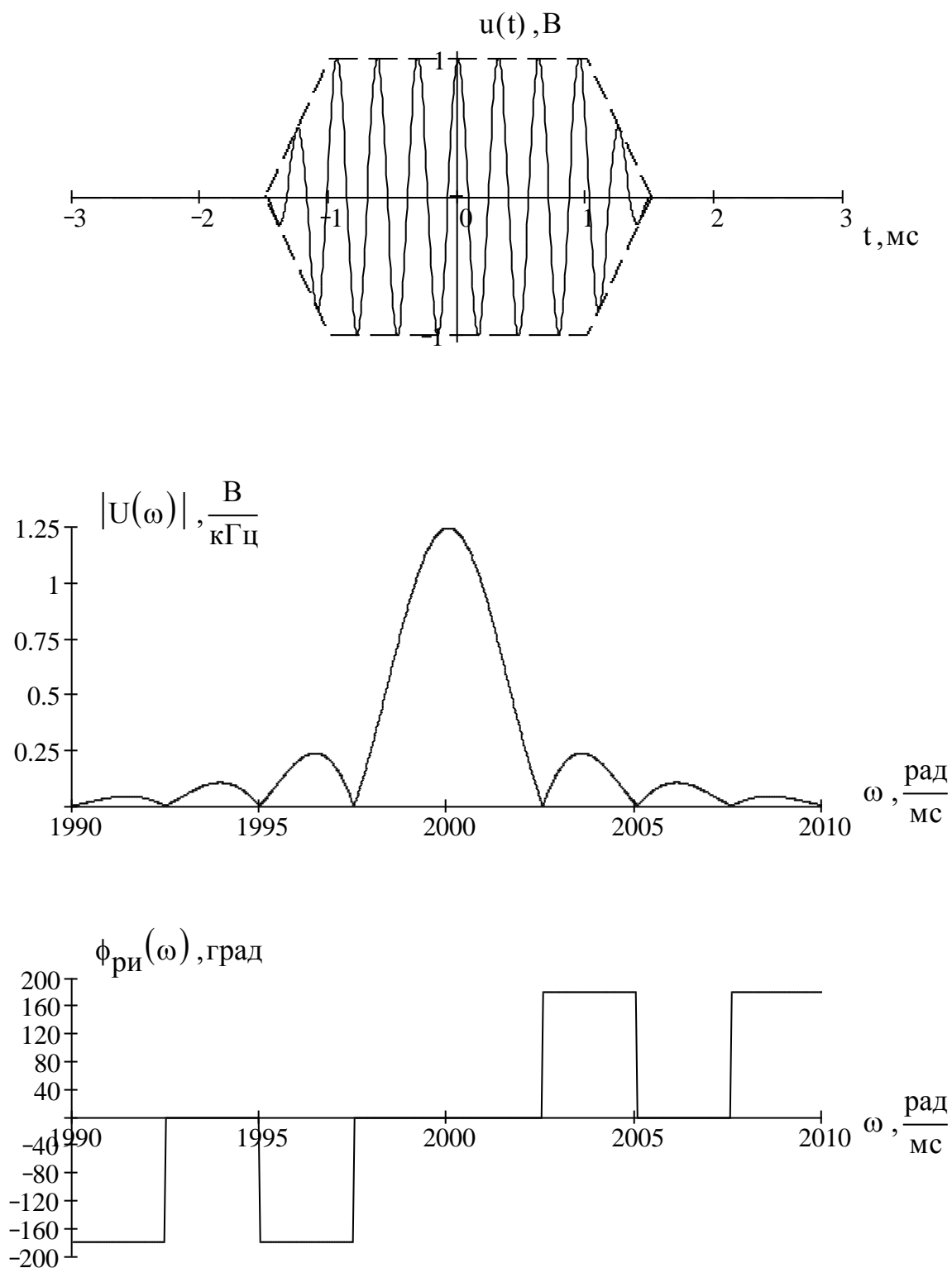


Рис.6. Одиночный радиоимпульс и его амплитудный спектр

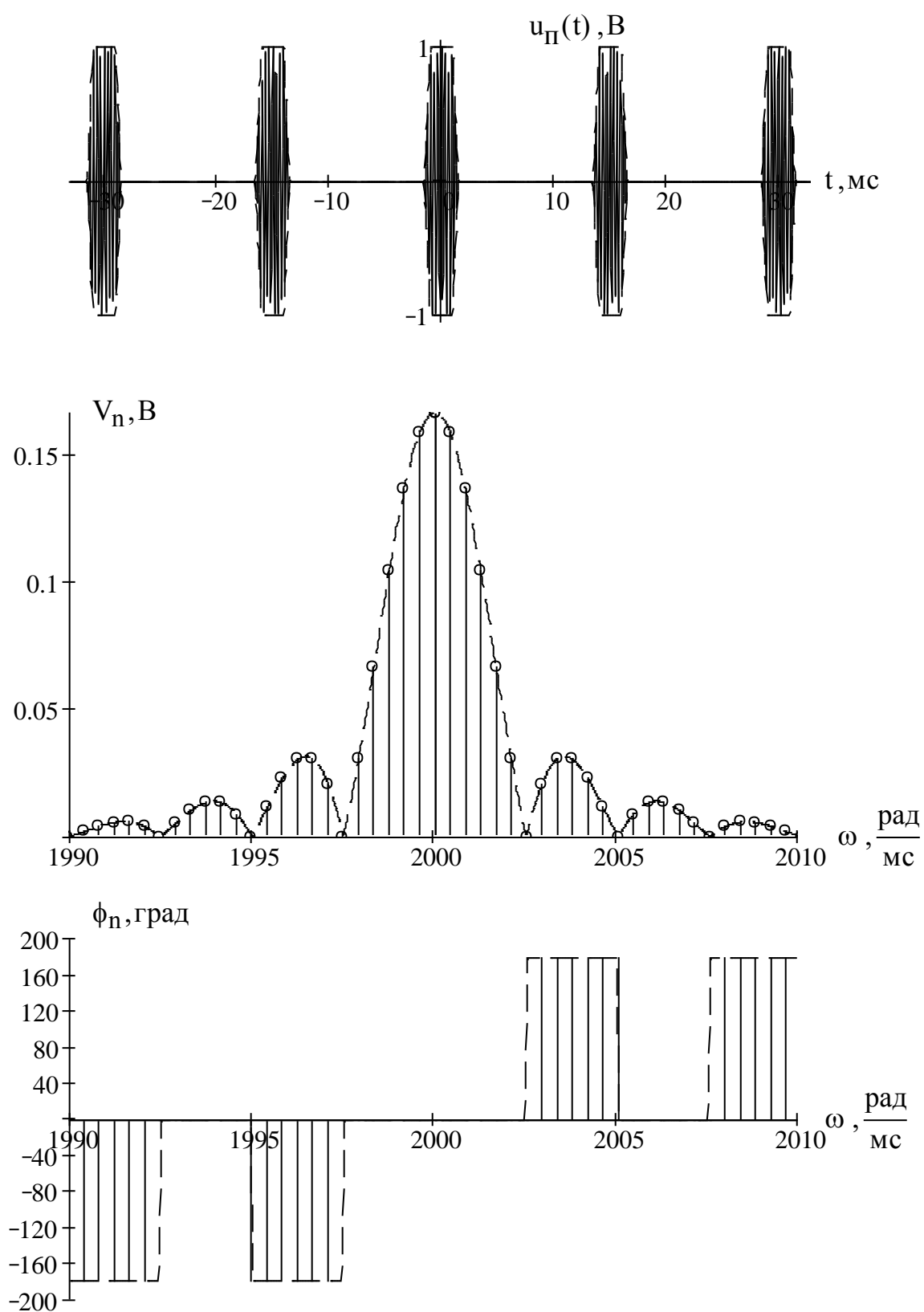


Рис.7. Периодическая последовательность радиоимпульсов и её амплитудный спектр

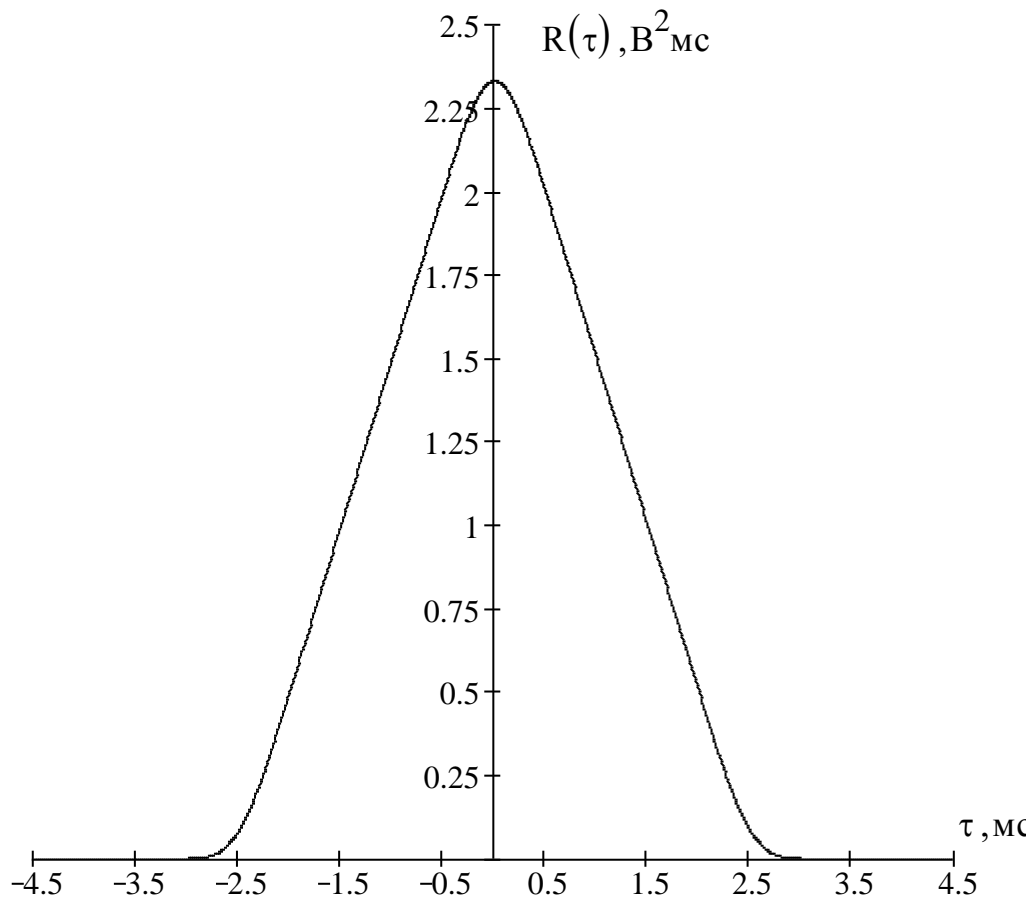


Рис.9. Автокорреляционная функция видеосигнала

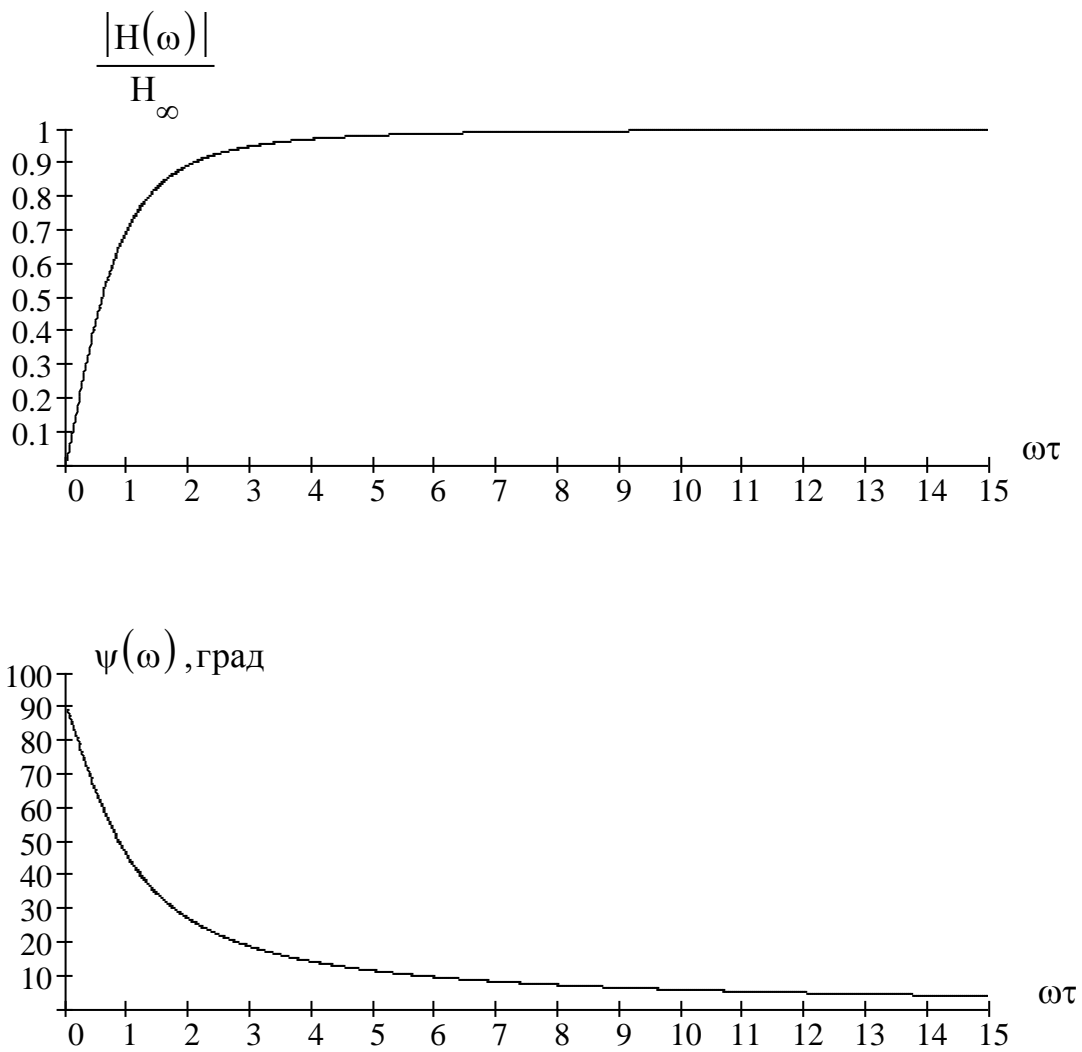


Рис.10. АЧХ и ФЧХ заданной цепи